**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра ВМ-2**

отчет **по ИДЗ**

**по дисциплине «Математическая статистика»**

Тема: **Классические методы мат. статистики**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 6381 |  | Дорох С.В. |
| Преподаватель |  | Малов С.В. |

Санкт-Петербург

2018

**Решение**

**Задание 1.**

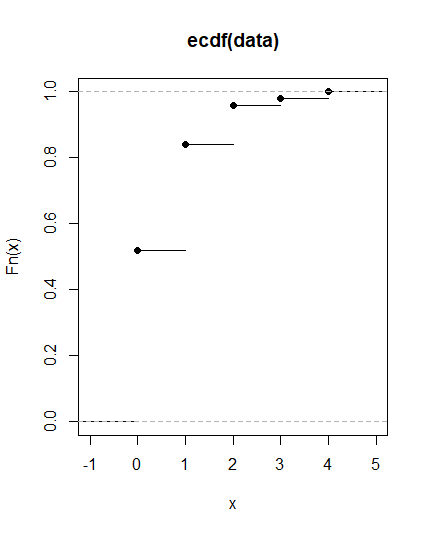
1. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму частот.

Полученный вариационный ряд:

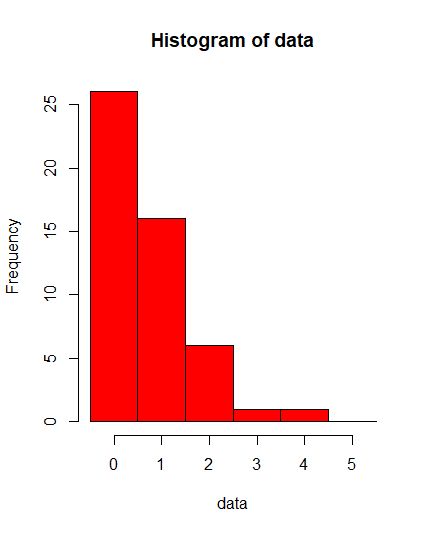
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 4

Построим эмпирическую функцию распределения по полученным данным:



И гистограмму частот:



1. Вычислить выборочные некоторых числовых характеристик.

* Математическое ожидание  
   Найдем выборочное среднее по формуле  = 0.7
* Дисперсия -   
  Найдем выборочную дисперсию по формуле = 0.82655306
* Медиана  
  Найдем выборочную квантиль порядка 1/2: 0
* Асимметрия  
  Найдем выборочную асимметрию формуле: = 1.405321

Эксцесс  
Найдем выборочный эксцесс по формуле: = 1.979413

* Вероятность попадания в заданный промежуток:

P(X ∈ [0.00, 1.14]) = F(1.14) –F(0.00) = 0.32

1. В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

В результате вычислений получили = 0.7, что равно математическому ожиданию нашей величины. Данный результат сходится с теоретическими оценками, полученным как по методу МП, так и по методу моментов: .

Метод максимального правдоподобия:

 =>  => 

 => 

Метод моментов: математическое ожидание: ****,  
 выборочный средний момент: ** =**>  , значит - несмещенная оценка.

1. Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости = 0.2 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

Так как  имеет распределение Пуассона, то  => .

По ММП получим:  , 

Эксперимент регулярен, значит, подстановка ОМП вместо параметра в информацию Фишера не нарушает асимптотической нормальности.

;; = 0*.20*;

,   
где  - квантиль порядка  стандартного нормального закона распределения.

.

Итого получим: .

Результат: [0.5483648, 0.8516352].

1. Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ2 проверки простой гипотезы согласия с распределением Пуассона с параметром λ0 = 1,4. Проверить гипотезу на уровне значимости α1= 0.2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.



Простая гипотеза Hо: 

Разделим таблицу частот (выше) на 3 интервала [0], [1], [2-4]. Число наблюдений, попавших в этот интервал: 26, 16, 8 соответственно.

Вероятность попадния в интервал:

Критерий имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 | 26 | 0.2465970 | 12,3 | 3.89309 | 15.15615175 |
| 1 | 16 | 0.3452357 | 17,3 | -0.303699 | 0.09223307 |
| 2 | 8 | 0.4081673 | 20,4 | -2.746695 | 7.54433343 |
|  | 50 | 1 | 50 | - | χ2набл = 22.7927 |

, следовательно, не принимаем гипотезу H0.

Для нахождения наибольшего значения уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу, вычисляем функцию распределения  в точке χ2, и вычтем полученное значение из единицы. Получаем: 1.123632e-05.

1. Построить критерий значимости χ2 проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости α1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Но – основная гипотеза: Х ~ Pois (). Поделим область на 3 интервала, аналогично предыдущему пункту.

Х2()=- зависит от , т.к. величины pi не фиксированы. Известно, что в случае регулярности эксперимента статистика  сходится по распределению к .

Критерий имеет вид:

В результате вычислений получили, что . Значит, гипотеза отвергается.

Наибольшее значение уровня значимости, при котором еще нет оснований отвергнуть гипотезу: 0.7022371.

1. Построим наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы пуассоновости с параметром при альтернативе пуассоновости с параметром . Проверить гипотезу на уровне значимости . Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

– основная гипотеза; – альтернативная гипотеза.

Согласно лемме Неймана-Пирсона:

Функция правдоподобия для распределения Пуассона была рассчитана ранее и составляет:

Теперь найдём :

После логарифмирования получим:

Примем , тогда система примет следующий вид:

Теперь найдём и :

Поскольку , то .

Найденные значения: и . Подставив полученные значения, получим критерий:

Так как , отвергаем гипотезу и принимаем альтернативу .

Теперь поменяем местами основную и альтернативную гипотезы – основная гипотеза; – альтернативная гипотеза и проведём зеркальные вычисления. В ходе расчётов получим значения и . Критерий:

Так как , принимаем альтернативную гипотезу (ранее ).

**h)** В пунктах (c)-(f) заменить семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений.

**c)** В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из геометрического распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

Геометрическое распределение:

ОМП для параметра λ:

Оценка λ по методу моментов:

; ;

Смещение:

(т.е. оценка несмещенная).

**d)** Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α1 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

Информация Фишера:

Благодаря тому, что эксперимент регулярен, подстановка ОМП вместо параметра в информацию Фишера не нарушает асимптотической нормальности.

где - квантиль порядка xα стандартного нормального закона распределения.

Результат вычислений: [0.5022919 0.8977081].

**e)** Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ2 проверки простой гипотезы согласия с геометрическим распределением с параметром λ0 = 1,4. Проверить гипотезу на уровне значимости α1 = 0,2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Таблица частот:

Простая гипотеза H0:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 | 26 | 0,4166 | 20,83 | 1.13196 | 1.281333 |
| 1 | 16 | 0,2431 | 12,16 | 1.1036 | 1.217921 |
| 2 | 8 | 0,3402 | 17 | -2.1853 | 4.775522 |
|  | 50 | 1 | 50 | - | χ2набл = 7,27478 |

7.27478 , следовательно, принимаем гипотезу H0.

Наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть H0: 0.02632101.

**f)** Построить критерий значимости χ2 проверки сложной гипотезы согласия с геометрическим распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.



Сложная гипотеза согласия: Но – основная гипотеза: Х ~ Geom (1/(+1))

Поделим область на *r*=3 интервалов, аналогично предыдущему пункту. *X*2- зависит от , т.к. величины *pi* не фиксированы. Известно, что в случае регулярности эксперимента статистика  сходится по распределению к **.

Критерий имеет вид:

В результате вычислений получили, что

=> принимаем гипотезу.

Наибольшее значение уровня значимости, при котором еще нет оснований отвергнуть гипотезу: 0.2167665

.

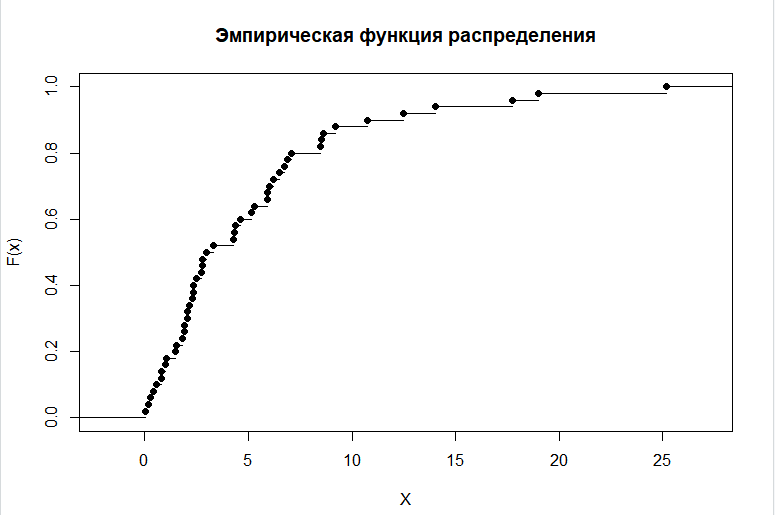
**Задание 2**.

1. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, 
2. гистограмму и полигон частот.

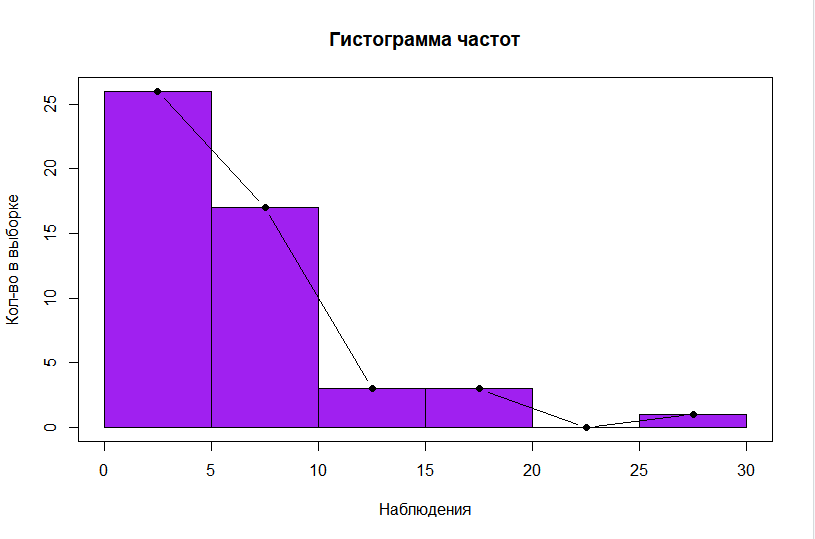
Вариационный ряд:



Эмпирическая функция распределения:



Гистограмма частот + полигон:



**b)** Задание: вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:

* Математическое ожидание  
   Найдем выборочное среднее по формуле  = 5.1428
* Дисперсия -   
  Найдем выборочную дисперсию по формуле = 26.86767
* Медиана  
  Найдем выборочную квантиль порядка 1/2: 3.3
* Асимметрия  
  Найдем выборочную асимметрию формуле: = 1.847076
* Эксцесс  
  Найдем выборочный эксцесс по формуле: = 3.635553
* Вероятность попадания в заданный промежуток:

P(X ∈ [4.00, 7.00]) = 0.26

**c)** В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из показательного распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра  и соответствующую оценку по методу моментов. Найти смещение оценок.

Плотность показательного распределения:

ОМП параметра λ:

Метод моментов:

Смещение оценки:

Несмещённая оценка:

**d)** Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости *α2* для параметра *λ* на базе оценки максимального правдоподобия.

Найдем информацию Фишера:

Оценка максимального правдоподобия параметра λ:

 .

Благодаря тому, что эксперимент регулярен, подстановка ОМП вместо параметра в информацию Фишера не нарушает асимптотической нормальности^

где - квантиль порядка xα стандартного нормального закона распределения.

Итого получим интервал уровня значимости : [0.1592053 0.2296879].

**e)** С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром . Проверить гипотезу на уровне значимости . Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Гипотеза

Согласно теореме Колмогорова, при справедливости гипотезы:

Обозначим

Согласно таблице распределения Колмогорова, α= 1,07.

Полученное значение – значит, H0 не принимается.

Наибольшее значение уровня значимости, при котором мы все еще могли бы принять

гипотезу 0.9953.

**f)** Используя гистограмму частот, построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением . Проверить гипотезу на уровне . Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Простая гипотеза H0:

Делим последовательность на r = 3 интервала: [-Inf, 5], [5,10], [10,Inf]. Вычислим частоты попадания наблюдений в i-й интервал, величину .



Критерий имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № интервала |  |  |  |  |  |  |
| 1 | -Inf | 5 | 30 | 0.4779542 | 1.248287 | 1.558222 |
| 2 | 5 | 10 | 14 | 0.249514 | 0.4315571 | 0.1862415 |
| 3 | 10 | Inf | 6 | 0.2725318 | -2.06603 | 4.268483 |
|  | | | | =1 | = 6.0129465 | |

Итак, получили, что χ2 > xα, следовательно принимаем гипотезу Hо.

Для нахождения наибольшего значения уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу, вычисляем функцию распределения χ2 с r-1 в точке χ2, и вычтем полученное значение из единицы. Получаем: 0.04946583.

.

**g)** Построить критерий проверки значимости сложной гипотезы согласия с показательным распределением. Проверить гипотезу на уровне . Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Производим действия аналогичные предыдущему пункту.

Получили, что принимаем гипотезу.

Наибольшее значение уровня значимости, при котором еще нет оснований отвергнуть гипотезу: 1.

**h)** Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы о показательности с параметром  при альтернативе показательности с параметром . Проверить гипотезу на уровне значимости . Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

Основная гипотеза , альтернативная гипотеза .

Согласно лемме Неймана-Пирсона:

Функция правдоподобия для показательного распределения:

Найдём :

Прологарифмируем полученное выражение:

Обозначим . Тогда критерий примет вид:

Из этого следует уравнение:

, .

Найдём из уравнения:

- квантиль распределения уровня :

Критерий примет вид:

Так как , отклоняем .

Поменяем местами основную и альтернативную теории и, проведя аналогичные вычисления, получим:

, принимаем .

Задание 2.2

В пунктах (c)-(h) заменить семейство показательных распределений на семейство гамма-распределений.

**c)** В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из гамма-распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

Плотность гамма распределения:

ОМП параметра λ:

Метод моментов:

Смещение:

.

Несмещённая оценка:

**d)** Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α2 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

Согласно ЦПТ, при больших k,n гамма-распределение может быть приближено нормальным распределением:

, при k → ∞.

По лемме Фишера:

Следовательно:

Найдем область:

где - квантиль порядка xα стандартного нормального закона распределения.

Результат: [3.029065 7.256535]

**e)** С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с гамма распределением с параметром λ0. Проверить гипотезу на уровне значимости α2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

Гипотеза

Согласно теореме Колмогорова, при справедливости гипотезы:

Обозначим

Согласно таблице распределения Колмогорова, α= 1,07.

Полученное значение = 1.07 – H0 отвергается.

Наибольший уровень значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу, согласно распределению Колмогорова, равен 2.2e-16.